УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ МНОЖИН СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г.В. Завізіон, І.Г. Ключник

Доведено існування диференційованих інваріантних торів систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Доказано существование дифференцируемых инвариантных торов систем интегро-дифференциальних уравнений.

Prove existence of differentiate invariant tori of the system of integral-differential equation.

В [1-3] досліджуються динамічні системи в $\Im_m \times E^n$ і зроблено огляд результатів в [4]. В [5] доводяться теореми існування інваріантних множин для систем із запізненням, а в [6] доводиться існування липшицевих торів нелінійних систем із запізненням. В даній статті, використовуючи ідеї [7], доводяться теореми існування інваріантних множин системи інтегро-диференціальних рівнянь і вказується алгоритм їх побудови.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}
\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s,y(t),y(s))ds, \varepsilon)y(t) - \\
- b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s,y(t),y(s))ds, \varepsilon) \times \\
\times (\int_0^T f(s,y(t),y(s))ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds, \varepsilon), \\
\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), y(t), \varepsilon),
\end{gathered} \tag{1}$$

де $y = (y_1 ... y_n), \varphi = (\varphi_1 ... \varphi_m), a, b, a_1, b_1, c, f$ періодичні функції по φ, $\psi = \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds$ з періодом 2π, ці функції визначені для всіх y, $z = \int_0^T f(s,y(t),y(s))ds, \varepsilon$, які належать області

$$\|y\| \le d, \|z\| \le d, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{2}$$

T – число. Припустимо, що $c(\varphi,\psi,0) = 0$, тобто при $\varepsilon = 0$ система (1) має інваріантний тор $y = 0$.

Згідно [7], інваріантну множину системи (1) будемо шукати у вигляді $y = u(\varphi,\varepsilon)$, де $u(\varphi,\varepsilon)$ – неперервна функція, періодична по φ з періодом 2π. Нехай $\varphi_t = \varphi_t(\varphi), \varphi_\tau(\varphi) = \varphi$ розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)$, де τ, φ - довільні сталі, $u(\varphi,\varepsilon)$- деяка періодична функція з періодом 2π. Функцію

$u(\varphi,\varepsilon)$ будемо визначати, як інваріантну множину системи (1), якщо для всіх $-\infty < t < \infty$ виконується тотожність

$$\frac{du(\varphi_t,\varepsilon)}{dt} = -b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds, u(\varphi_t,\varepsilon), \int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$
$$\times u(\varphi_t,\varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds, u(\varphi_t,\varepsilon), \int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$
$$\times(\int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds,\varepsilon).$$

Для відшукання інваріантної множини $\Im(\varepsilon)$ застосуємо ітераційний метод, який дає можливість знаходити $\Im(\varepsilon)$, як границю послідовності торів $\Im^0(\varepsilon) = \Im(0), \Im^1(\varepsilon)...\Im^i(\varepsilon),...$ кожний з яких є інваріантним тором

$$\Im^{i+1}(\varepsilon): y = u^{i+1}(\varphi,\varepsilon), i = 0,1..., \quad (3)$$

відповідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi(t), u^i(\varphi(t),\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\frac{dy}{dt} = -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds, u^i(\varphi(t),\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi(t),\varepsilon),u^i(\varphi(s),\varepsilon))ds,\varepsilon)y(t) -$$
$$- b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds, u^i(\varphi(t),\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi(t),\varepsilon),u^i(\varphi(s),\varepsilon))ds,\varepsilon)\times \quad (4)$$
$$\times(\int_0^T f(s,u^i(\varphi(t),\varepsilon),u^i(\varphi(s),\varepsilon))ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s,\varphi(t),\varphi(s))ds,\varepsilon).$$

Можливість знаходити тор $\Im(\varepsilon)$ таким шляхом обґрунтовує лема 1 з [7]. Згідно цієї леми, якщо функція $a(\varphi,y,\varepsilon), b(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon), b_1(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon), c(\varphi,\psi,\varepsilon)$ є неперервними по φ,ψ,y,z на множині (2), а також $z(t)$ неперервні по t для довільного скінченого відрізка T_1 прямої $-\infty < t < \infty$, то якщо послідовність (3) рівномірно збігається, для довільного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, до граничної функції $u = \lim_{i\to\infty} u^i(\varphi,\varepsilon)$, то $u(\varphi,\varepsilon)$ означає інваріантний тор $\Im(\varepsilon)$. Дійсно, так як $y = u^{i+1}(\varphi,\varepsilon)$ інваріантний тор системи (4), то для траєкторій φ_t^i, y_t^i, які лежать на ньому, виконуються співвідношення

$$\varphi_t^i = \varphi + \int^t a(\varphi_t^i, u^i(\varphi_t^i,\varepsilon),\varepsilon)dt,$$

$$u^{i+1}(\varphi_t^i,\varepsilon) = u^{i+1}(\varphi,\varepsilon) + \int_\tau^t (-b(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds, u^i(\varphi_t^i,\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi_t^i,\varepsilon),u^i(\varphi_s^i,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$
$$\times u^{i+1}(\varphi_t^i,\varepsilon) - b_1(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s,\varphi_t^i,\varphi_s^i))ds, u^i(\varphi_t^i,\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi_t^i,\varepsilon),u^i(\varphi_s^i,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times \quad (5)$$
$$\times(\int_0^T f(s,u^i(\varphi_t^i,\varepsilon),u^i(\varphi_s^i,\varepsilon))ds) + c(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s,\varphi_t^i,\varphi_s^i))dt.$$

З співвідношення (5) випливає рівномірна обмеженість і рівностепена неперервність послідовності $\varphi_t^i (i = 0,1...)$ для довільного скінченого відрізка T_1.

Значить існує рівномірно збіжна підпослідовність $\varphi_t^{i_k}$ і позначивши $\varphi_t = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi_t^{i_k} (t\in T_1)$, і перейшовши в (5) при $i = i_k$ до границі, то одержимо, що

$$\varphi_t = \varphi + \int_\tau^t a(\varphi_t, u(\varphi_t,\varepsilon),\varepsilon)dt, \quad (t\in T_1),$$

$$u(\varphi_t,\varepsilon) = u(\varphi,\varepsilon) + \int_\tau^t (-b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds, u(\varphi_t,\varepsilon), \int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$

$$\times u(\varphi_t,\varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds, u(\varphi_t,\varepsilon), \int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$

$$\times(\int_0^T f(s,u(\varphi_t,\varepsilon),u(\varphi_s,\varepsilon))ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s,\varphi_t,\varphi_s)ds,\varepsilon))dt,$$

що достатньо, щоб $y = u(\varphi,\varepsilon)$ визначала інваріантний тор системи (1). Таким чином, питання існування інваріантного тора системи (1) зв'язаний з питанням існування інваріантного тора системи (4). Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = -b(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s,\varphi_t(\varphi),\varphi_s(\varphi))ds, u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon),u^i(\varphi_s(\varphi),\varepsilon),\varepsilon)y(t) -$$

$$-b_1(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s,\varphi_t(\varphi),\varphi_s(\varphi))ds, u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon),u^i(\varphi_s(\varphi),\varepsilon))ds,\varepsilon)\times \tag{6}$$

$$\times(\int_0^T f(s,u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon),u^i(\varphi_s(\varphi),\varepsilon))ds) + c(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s,\varphi_t(\varphi),\varphi_s(\varphi))ds,\varepsilon),$$

де $u^i(\varphi,\varepsilon)$ задана 2π – періодична по φ функція, $\varphi_t(\varphi) = \varphi_t^i(\varphi,\varepsilon)(\varphi_0(\varphi) = \varphi)$ загальний розв'язок першого рівняння (4). Позначимо $G_t^i(\tau,\varphi,\varepsilon)$ функцію Гріна задачі про обмежені розв'язки системи (6), припускаючи, що вона існує. Тоді співвідношення

$$y_t(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^i(\tau,\varphi,\varepsilon)c_1(\varphi_\tau(\varphi),\psi_\tau(\varphi),z_\tau(\varphi),\varepsilon)d\tau,$$

де

$$c_1(\varphi_t(\varphi),\psi_t(\varphi),z_t(\varphi),\varepsilon) = -b_1(\varphi_t(\varphi),\psi_t(\varphi),u(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), \int_0^T f(s,u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon),u^i(\varphi_s,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$

$$\times(\int_0^T f(s,u^i(\varphi_t(\varphi),\varepsilon),u^i(\varphi_s(\varphi),\varepsilon))ds) + c(\varphi_t(\varphi),\psi_t(\varphi),\varepsilon),$$

визначає сімейство обмежених розв'язків системи (6) ,яке залежить від φ і ε як від параметрів. Ці розв'язки заповнюють інваріантну множину

$$y = u^{i+1}(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)c_1(\varphi_\tau(\varphi),\psi_\tau(\varphi),z_\tau(\varphi),\varepsilon)d\tau,$$

яка є інваріантною тороїдальною множиною системи (4).

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a_0(\varphi(t)) + a_1(\varphi(t)),$$
$$\frac{dy}{dt} = -(b_0(\varphi(t),\psi(t)) + b_1^0(\varphi(t),\psi(t)))y(t) + c_0(\varphi(t),\psi(t)), \tag{7}$$

де $a_0, b_0, b_1^0, c_0 \in C^r(\Im_m \times \Im_m) = C^r(\Im_m \times \Im_m : 0 \le \varphi_i \le 2\pi, 0 \le \psi_i \le 2\pi, i = \overline{1,m})$, a_0, b_0 - фіксовані, a_1, b_1^0, c_0 - довільні, але малі в смислі норми $C^r(\Im_m \times \Im_m)$ функції. Вірною є лема, доведення якої аналогічно приведеному в [7].

Лема 1. *Припустимо, що система рівнянь (7) така, що знайдуться ціле* r *і і сталі* M, α, K, *такі, що при всіх* $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi)$ *виконується нерівність* $\max\{|a_1|_r, |b_1^0|_r\} \le M$, *де система рівнянь (7) має функцію Гріна про інваріантні тори* $G_0(\tau,\varphi)$, *яка для кожного* $\tau \in (-\infty, +\infty)$ *задовольняє умові*

$$|G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)c_0(\varphi_\tau(\varphi),\psi_\tau(\varphi))|_r \le K\exp(-\alpha|\tau|)|c_0(\varphi,\psi)|_r. \tag{8}$$

Тоді система рівнянь (7) має інваріантний тор $\Im : u = u(\varphi,\varepsilon)$, *для якого вірна оцінка*

$$|u(\varphi,\varepsilon)|_r \le \frac{2K}{\alpha}|c_0(\varphi,\psi)|_r \tag{9}$$

Застосуємо лему до послідовності торів (3). Покладемо
$a_0(\varphi) = a(\varphi,0,0), b_0(\varphi,\psi) = b(\varphi,\psi,0,0,0), a'(\varphi,y,\varepsilon) = a(\varphi,y,\varepsilon) - a(\varphi,0,0)$,
$b'(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon) = b(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon) - b(\varphi,\psi,0,0,0)$, і будемо припускати, що $c(\varphi,\psi,\varepsilon), a(\varphi,y,\varepsilon), b(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon), b_1(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon) \in C^r(D)$, для всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, де D - область $\|y\| \le d, \|z\| \le d, (\varphi,\psi) \in \Im_m \times \Im_m$. Припустимо також, що вірні нерівності

$$\max\{|a'(\varphi,y,\varepsilon)|_r, |b'(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon)|_r, |b_1|_r \cdot PT + |c|_r\} \le L_r(d,\varepsilon_0),$$
$$\frac{4K}{\alpha}M_1 T|b_1|_r \le R < 1, \tag{10}$$

де $L_r(d,\varepsilon_0)$ - додатня монотонно спадна функція одного із своїх аргументів при фіксованому значенні іншого, яка має властивість $L_r(d,\varepsilon_0) \to 0$ при $d \to 0$, $\varepsilon_0 \to 0$, $R < 1; P = \max_t \|f(t,0,0)\|, \|f_y{}'(t,y,y)\| \le M_1$. Існування послідовності торів (3) встановлює наступна теорема.

Теорема1. *Нехай функції* $a_0(\varphi), b_0(\varphi,\psi)$, *такі, що система рівнянь (6) задовольняє умовам леми 1. Тоді можна вказати, таке* $\varepsilon^0, 0 < \varepsilon^0 \le \varepsilon_0$, *щоб при* $\varepsilon < \varepsilon^0$ *послідовність (3) є послідовністю інваріантних торів, кожний з яких належить простору* $C^r(\Im_m)$ *і виконується нерівність*

$$|u^i(\varphi,\varepsilon)|_r \le \frac{2L_r(0,\varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \tag{11}$$

Доведення. Оскільки $u^0 = 0$, то теорема справедлива при $i = 0$. Припустимо, що вона має місце для $i = k$ і доведемо, що інваріантний тор $\Im^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ існує і задовольняє нерівність (11). Для цього покладемо в (6) $i = k$ і тора $y = u^{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ отримаємо систему

$$\frac{d\varphi_t^k}{dt} = a_0(\varphi_t^k) + a'(\varphi, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\frac{dy}{dt} = -(b_0(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds) +$$

$$+ b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon)\int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon)ds, \varepsilon))y(t) + \tag{12}$$

$$+ c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))ds, \varepsilon),$$

де

$$c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))ds, \varepsilon) =$$

$$= -b_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))ds, \varepsilon) \times$$

$$\times (\int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))ds) + c(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, \varepsilon).$$

В силу того, що функції a', b' задовольняють нерівність (10), а $u^k(\varphi, \varepsilon)$ нерівність (11), то при достатньо малому ε^0 для всіх $\varepsilon \le \varepsilon^0$ виконується нерівність

$$\max_{\varepsilon}\{\left|a'(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon)\right|_r, \left|b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k)ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))ds, \varepsilon)\right|_r\} \le$$

$$\le L_r\left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0\right). \tag{13}$$

Так як $L_r(0, \varepsilon^0) \to 0$ при $\varepsilon^0 \to 0$, то завжди можна вважати ε^0 настільки малим, щоб крім нерівності (13) виконувалися нерівності

$$L_r\left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0\right) \le M, \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \le d \tag{14}$$

При такому наборі ε^0, для всіх $\varepsilon \le \varepsilon^0$ до системи (12) можна застосовувати лему 1, згідно якої існує тор $\Im^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$, для якого вірна оцінка

$$\left|u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)\right|_r \le \frac{2K}{\alpha}\left|c_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon)\right|_r \le \frac{2K}{\alpha}(\left|b_1\right|_r(2M_1T\left|u^k\right|_r + PT) + \left|c\right|_r) \tag{15}$$

Але, згідно (10) і монотонного спадання $L_r(d, \varepsilon_0)$ по змінній d, маємо

$$\left|b_1\right|_r PT + \left|c\right|_r \le L_r(0, \varepsilon_0). \tag{16}$$

Тоді з (10),(25),(26) одержимо

$$\left|u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)\right|_r \le \frac{2K}{\alpha}(2\left|b_1\right|_r M_1T\left|u^k\right|_r + L_r(0, \varepsilon_0)) \le \frac{2K}{\alpha}(\frac{\alpha \cdot R \cdot 2M_1T}{4KM_1T} \times$$

$$\times \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} + L_r(0, \varepsilon_0)) \le \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha}(\frac{R}{1-R} + 1) = \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha(1-R)} \le d.$$

Рівності (27), (29), (30) із [5] показують спосіб вибору ε^0 для випадку $r = 0$. Теорема доведена.

Вірною є така допоміжна лема.

Лема 2. *Мають місце нерівності*

$$\left\|\varphi_t^k-\varphi\right\|\le e^{k_1|t|}-1, \tag{17}$$

$$\left|\varphi_t^k-\varphi_t^{k-1}\right|_0\le\frac{\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 l(e^{k_1|t|}-1)}{1+ld}, \tag{18}$$

де $\omega^k(\varphi,\varepsilon)=u^k(\varphi,\varepsilon)-u^{k-1}(\varphi,\varepsilon), k_1=l|a|_1(1+ld)$. Доведення нерівності (17) випливає з наступних нерівностей

$$\left\|\varphi_t^k-\varphi\right\|\le\int_0^{|t|}\left\|a(\varphi_s^k,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon),\varepsilon)\right\|dt\le\int_0^{|t|}(\left\|a(\varphi_s^k,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon),\varepsilon)\right\|+$$

$$+\left\|a(\varphi,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right\|+\left\|a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,0,\varepsilon)\right\|+\left\|a(\varphi,0,\varepsilon)\right\|)ds\le$$

$$\le\left\|a_1\right\|(\int_0^{|t|}\left\|(\varphi_s^k-\varphi\right\|ds+l\int_0^{|t|}\left\|u^k(\varphi_s^k,\varepsilon)-u^k(\varphi,\varepsilon)\right\|ds+l\left|u^k\right|_1|t|+|t|)\le k_1|t|+k_1\int_0^{|t|}\left\|(\varphi_s^k-\varphi\right\|ds$$

Застосовуючи до останньої нерівності теорему 1.2 із [8] одержуємо нерівність (17). З (17) випливає справедливість наступної нерівності

$$\int_0^T\left\|(\varphi_s^k-\varphi\right\|ds\le\frac{1}{k_1}(e^{k_1T}-1)-T$$

Застосувавши до нерівностей (36),(37) з [5] теорему 1.2 із [8] випливає виконання нерівності (18).

Доведемо збіжність послідовності інваріантних торів (3). Так як функція $u^{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ задає інваріантний тор системи (5) при $i=k$, то вона задовольняє тотожності

$$\frac{du^{k+1}(\varphi_t^k,\varepsilon)}{dt}\equiv\frac{\partial u^{k+1}(\varphi_t^k,\varepsilon)}{\partial\varphi_t^k}\cdot a(\varphi_t^k,u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),\varepsilon)\equiv$$

$$\begin{aligned}&\equiv-b(\varphi_t^k,\int_0^T f_1(s,\varphi_t^k,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)u^{k+1}(\varphi_t^k,\varepsilon)-\\&-b_1(\varphi_t^k,\int_0^T f_1(s,\varphi_t^k,\varphi_s^k)\boldsymbol{ds},u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon),\varepsilon)\times\\&\times\int_0^T f(s,u^k(\varphi_t^k,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds)+c(\varphi_t^k,\int_0^T f_1(s,\varphi_t^k,\varphi_s^k)\boldsymbol{ds},\varepsilon)\end{aligned} \tag{19}$$

При $t=0$ нерівність набирає вигляду

$$\frac{\partial u^{k+1}(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\cdot a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\equiv$$

$$\begin{aligned}&\equiv-b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)u^{k+1}(\varphi,\varepsilon)-\\&-b_1(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)\times\\&\times(\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds)+c(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,\varepsilon),\end{aligned} \tag{20}$$

де $\varphi_0^k(\varphi)=\varphi$.

З (20) випливає тотожність

$$\frac{\partial\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\cdot a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)+\frac{\partial u^k(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}(a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\varepsilon))\equiv$$

$$\equiv -b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)-$$

$$-(b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)-$$

$$-b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds,\varepsilon))u^k(\varphi,\varepsilon)-$$

$$-b_1(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)(\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds)$$

$$+b_1(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$

$$\times(\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds)+c(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,\varepsilon)-c(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,\varepsilon). \qquad (21)$$

Тотожність (21) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\cdot(a(\varphi,0,0)+(a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,0,0)))+$$

$$+(b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,0,0,0)+(b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)-$$

$$-b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,0,0,0)))\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)=c_k(\varphi,\varepsilon), \qquad (22)$$

де

$$c_k(\varphi,\varepsilon)=-\frac{\partial u^k(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\cdot(a(\varphi,u^k(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)-a(\varphi,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\varepsilon))-$$

$$-b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)-$$

$$-b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds,\varepsilon))u^k(\varphi,\varepsilon)-$$

$$-b_1(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon)(\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds)+$$

$$+b_1(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds,\varepsilon)\times$$

$$\times(\int_0^T f(s,u^{k-1}(\varphi,\varepsilon),u^{k-1}(\varphi_s^{k-1},\varepsilon))ds)+c(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,\varepsilon)-c(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^{k-1})ds,\varepsilon). \qquad (23)$$

З співвідношення (22) випливає, що $y=\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ є інваріантним тором системи

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv a(\varphi,0,0) + (a(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s)ds,\varepsilon) - a(\varphi,0,0)),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -(b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,0,0,0) + \tag{24}$$
$$b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,u^k(\varphi,\varepsilon),\int_0^T f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))ds,\varepsilon) - -b(\varphi,\int_0^T f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)ds,0,0,0))y + c(\varphi,\varepsilon)$$

В силу того, що система (24) має вигляд системи (12), то $y = \omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)$ можна записати через функцію Гріна задачі про інваріантні тори системи (24) у вигляді

$$y = \omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0^k(\tau,\varphi)c_k(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)d\tau,$$

причому для $\varepsilon \le \varepsilon^0$, в силу нерівності (9), вірною є оцінка

$$\left|\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \le \frac{2K}{\alpha}\left|c_k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 .$$

Враховуючи вигляд функції $c_k(\varphi,\varepsilon)$ визначений рівністю (23) маємо оцінку

$$\left|\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \le \frac{2K}{\alpha}\{l\left|u^k\right|_1\left|a\right|_1\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + l\left|c\right|_1\left|f\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds + (l\left|b\right|_1\left|f_1\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds +$$
$$+l\left|b\right|_1\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + l^2\left|b\right|_1\left|f\right|_1(2T\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + \left|u^k\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds)\cdot\left|u^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 +$$
$$+(l\left|b_1\right|_1\left|f_1\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds + l\left|b_1\right|_1\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + l^2\left|b_1\right|_1\left|f\right|_1(2T\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + \left|u^k\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds))\times$$
$$\times(2l\left|f\right|_1\left|u^k\right|_0 + PT) + (2lT\left|f\right|_1\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0 + l\left|f\right|_1\left|u^k\right|_1\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\right\|ds)\times \tag{25}$$
$$\times(l\left|b_1\right|_1\int_0^T\left\|f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)\right\|ds + l\left|b_1\right|_1\left|u^k\right|_0 + l\left|b_1\right|_1\cdot\int_0^T\left\|f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))\right\|ds + \left\|b_1(\varphi,0,0,0,\varepsilon)\right\|)\}$$

Знайдемо наступні оцінки

$$\int_0^T\left\|f_1(s,\varphi,\varphi_s^k)\right\|ds \le \int_0^T(\left\|f_1(s,\varphi,\varphi_s^k) - f_1(s,\varphi,\varphi)\right\| + \left\|f_1(s,\varphi,\varphi)\right\|) \le \left|f\right|_1(\int_0^T\left\|\varphi_s^k - \varphi\right\|ds +$$
$$+T),\int_0^T\left\|f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon)\right\|ds \le \int_0^T(\left\|f(s,u^k(\varphi,\varepsilon),u^k(\varphi_s^k,\varepsilon)) - f(s,0,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon))\right\| + \tag{26}$$
$$+\left\|f(s,0,u^k(\varphi_s^k,\varepsilon)) - f(s,0,0)\right\| + \left\|f(s,0,0)\right\|)ds \le 2l\left|f\right|_1\left|u^k\right|_0 T + PT$$

Підставляючи (26) в (25) і використовуючи лему 2 одержимо

$$\left|\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)\right|_0 \le \frac{2K}{\alpha}\left|\omega^k(\varphi,\varepsilon)\right|_0\left\{dl\left|a\right|_1 + \frac{l^2\left|c\right|_1\left|f_1\right|_1}{1+ld}\left(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-T\right) + \frac{l^2\left|b\right|_1\left|f_1\right|_1}{1+ld}\left(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-T\right) +\right.$$
$$+l\left|b_1\right| + 2TL^2\left|b\right|_1\left|f\right|_1 + \frac{dl^3\left|b\right|_1\left|f\right|_1}{1+ld}\cdot\left(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-T\right) + (2l\left|f\right|_1 d + PT)\cdot(\frac{l^2\left|b_1\right|_1\left|f_1\right|_1}{1+ld}\cdot(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-$$

$$
-T)+l|b_1|_1+2TL^2|b_1|_1|f|_1+\frac{dl^3|b_1|_1|f|_1}{1+ld}\cdot\left(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-T\right))+\left(2lT|f|_1+\frac{l^2|f|_1}{1+ld}\cdot\left(\frac{1}{k_1}\left(e^{k_1T}-1\right)-T\right)\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{l|b_1|_1|f|_1}{k_1}\cdot\left(e^{k_1T}-1\right)+l|b_1|_1 d+l|b_1|_1\left(2l|f|_1 dT+PT\right)+|b_1|_1\right)\Big)\Big\} \qquad (27)
$$

Враховуючи (10) з нерівності (27) знаходимо

$$
\left|\omega^{k+1}(\varphi,\varepsilon)\right|_0\le\rho\left|\omega^{k}(\varphi,\varepsilon)\right|_0\le\rho^{k-1}\left|u^{1}(\varphi,\varepsilon)\right|_0,
$$

де ρ — додатня константа, менша одиниці, при малих ε. Остання нерівність доводить збіжність послідовності інваріантних торів (3) в просторі $C^0(\Im_m)$ і неперервність граничної функції по ε в точці $\varepsilon=0$.

Поклавши $\lim\limits_{k\to\infty}u^k(\varphi,\varepsilon)=u(\varphi,\varepsilon)$ і використовуючи лему Арцела методом з [1] можна довести $u(\varphi,\varepsilon)\in C^{r-1}(\Im_m)$. З леми 1 [7] і збіжності послідовності $u^k(\varphi,\varepsilon)$ в $C^{r-1}(\Im_m)$ випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай функції* $\grave{a}(\varphi,y,\varepsilon), b(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon), b_1(\varphi,\psi,y,z,\varepsilon)\in C^r(D)$ *і виконуються нерівності (10), а також для достаньо малих по нормі в* $C^r(\Im_m\times\Im_m)$ *функцій* $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi,\psi), c_0(\varphi,\psi)$ *система рівнянь (7) має функцію Гріна* $G_0(\tau,\varphi)$ *задачі об інваріантних торах, яка задовольняє нерівність (8).* Тоді можна вказати таке $0<\varepsilon^0\le\varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon\in\left[0,\varepsilon^0\right]$ система рівнянь (1) має інваріантний тор $\Im(\varepsilon)$: $y=u(\varphi,\varepsilon), u(\varphi,\varepsilon)\in C^{r-1}(\Im_m)$, для якого $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|u(\varphi,\varepsilon)|_{r-1}=0$.

Таким чином, вказані умови існування інваріантних тороїдальних множин системи інтегро- диференціальних рівнянь і пропонується алгоритм їх побудови.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А..М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука, 1987. - 302 с.

2. Самойленко А.М. О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, №12. -С. 1665 - 1699.

3. Самойленко А.М. К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. - 2001. - 53, №4. - С. 513 - 521.

4. Самойленко А.М. Динамические системы в $\Im_m\times E^n$ // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, №10. - С. 1283 - 1297.

5. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. - 1974. - 26, №5. - С. 611 - 620.

6. Цидыло К.В. Колебания нелинейных систем с запаздыванием: Автореф. дис. ... кан. фіз. - мат. наук. - Київ, 1973. - 14 с.

7. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении. Изв. АН. СССР. сер. матем., т. 34, №6, 1970. - С. 1219 - 1240.

8. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1976. - 151 с.